



Numbers : Jurnal Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
A Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.

Grafik Limit Supremum: Penerapan Archimedean Property dan Supremum Property melalui Komputasi Python

Limit Supremum Graph: Applying the Archimedean Property and Supremum Property through Python-Based Computation

**Arafah Intan Purnama^{1*}, Chairani Zulfia², Puspa Cahaya³,
Xenara Ekklesia Tambunan⁴**

^{1,2,3,4,5} Universitas Negeri Medan, Kota Medan, Indonesia

[¹arafah.4231230006@mhs.unimed.ac.id](mailto:arafah.4231230006@mhs.unimed.ac.id)

[²chairanizulfia200@mhs.unimed.ac.id](mailto:chairanizulfia200@mhs.unimed.ac.id)

[³puspa.4231230003@mhs.unimed.ac.id](mailto:puspa.4231230003@mhs.unimed.ac.id)

[⁴ekkesiaxen@gmail.com](mailto:ekkesiaxen@gmail.com)

Kata Kunci :

Limit supremum; Sifat
Archimedean; Sifat supremum;
Visualisasi komputasi; Python

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk merancang dan menganalisis model grafik Limit Supremum berbasis komputasi Python sebagai media visualisasi untuk memahami penerapan Sifat Archimedean dan Supremum Property dalam analisis real. Kedua sifat tersebut merupakan fondasi penting dalam pembuktian konvergensi, keberadaan batas atas, serta perilaku barisan real, namun sering kali sulit dipahami secara intuitif karena sifatnya yang abstrak. Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif-komputasional dengan metode eksperimen simulatif, di mana data diperoleh dari hasil komputasi numerik menggunakan Python dengan library NumPy dan Matplotlib. Barisan-barisan yang dianalisis meliputi representasi Sifat Archimedean melalui pertumbuhan bilangan asli, supremum himpunan, infimum himpunan, serta limit supremum barisan osilatif. Hasil visualisasi menunjukkan bahwa Sifat Archimedean terilustrasikan secara jelas melalui pertumbuhan tak terbatas himpunan bilangan asli, sedangkan Supremum Property terverifikasi melalui grafik himpunan yang mendekati nilai 1 sebagai batas atas terkecil. Visualisasi limit supremum memperlihatkan bahwa barisan osilatif yang diredam oleh faktor memiliki supremum ekor yang semakin mendekati satu nilai limit tertentu. Selain itu, grafik infimum menegaskan bahwa barisan menurun mendekati nol meskipun tidak pernah mencapainya. Seluruh hasil grafik konsisten dengan teori analisis real seperti yang dikemukakan Bartle dan Sherbert, sehingga menunjukkan bahwa komputasi Python efektif digunakan sebagai alat verifikasi empiris untuk memperkuat intuisi konseptual terhadap supremum, infimum, Sifat Archimedean, dan limit superior. Penelitian ini sekaligus membuktikan bahwa pendekatan visual berbasis komputasi mampu menjembatani kesenjangan antara formalisme matematis dan pemahaman intuitif dalam analisis real.

Keywords :

Limit supremum; Archimedean property; Supremum property; Computational visualization; Python

ABSTRACT

This study aims to design and analyze a Python-based computational model to visualize the Limit Supremum and demonstrate the application of the Archimedean Property and the Supremum Property within real analysis. These foundational concepts play essential roles in establishing convergence, determining least upper bounds, and describing the behavior of real sequences; however, they are often difficult to grasp intuitively due to their abstract and formal nature. Using a quantitative-computational approach, this research employs a simulation-based experimental method in which data are generated through numerical computation using Python and the NumPy and Matplotlib libraries. The sequences examined include the representation of the Archimedean Property through the unbounded growth of natural numbers, the supremum of the set $\mathbb{N}$, the infimum of the set $\mathbb{N}^{-1}$, and the limit superior of the oscillatory sequence $\sin(n)$. The visualization results show that the Archimedean Property is clearly illustrated through the indefinitely increasing behavior of natural numbers, while the Supremum Property is verified through a graphical depiction of the set $\mathbb{N}^{-1}$ approaching 1 as its least upper bound. The limit supremum visualization further indicates that the oscillatory sequence dampened by the factor $\frac{1}{n}$ converges to a stable supremum of its tail sequence. In addition, the infimum graph confirms that the sequence decreases toward zero without ever reaching it. All graphical outputs are consistent with theoretical results established in real analysis literature, particularly as described by Bartle and Sherbert, demonstrating that Python-based computation is an effective empirical verification tool for strengthening conceptual intuition related to supremum, infimum, the Archimedean Property, and the limit superior. This study concludes that computational visualization serves not only as an illustrative medium but also as an exploratory and verification mechanism that bridges the gap between mathematical formalism and intuitive understanding in real analysis.

PENDAHULUAN

Fondasi Analisis Real dibangun di atas sifat – sifat fundamental sistem bilangan real, terutama Sifat kelengkapan (Supremum Property) dan Sifat Archimedean (Archimedean Property). Sifat Supremum, yang menjamin keberadaan batas atas terkecil (supremum) untuk setiap himpunan bilangan real tak kosong yang terbatas di atas, adalah aksioma yang membedakan $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Q}$ (Bartle & Sherbet, 2011). Sifat ini, bersama dengan sifat Archimedean, yang memformalkan konsep bilangan real tidak terbatas oleh bilangan asli, merupakan landasan kritis dalam pembuktian formal konvergensi barisan, keberadaan limit, dan pembangunan kalkulus secara rigor.

Meskipun formalisme pembuktian ($\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$) adalah ciri khas Matematika Murni, sifat abstrak dari konsep – konsep seperti Limit Supremum ($\limsup$) seringkali menghambat pembentukan intuisi mendalam yang diperlukan untuk merumuskan konjektur yang valid dalam penelitian. Limit Supremum, sebagai batas dari barisan supremum ekor (tail) barisan, menggambarkan perilaku asimtotik batas atas dan berperan sentral dalam studi barisan yang berfluktuasi atau barisan subsekuensial (Rudin, 2019). Pemahaman mendalam ini sering diperkuat melalui analogi dari bidang terkait seperti Ruang Metrik dan Analisis Fungsional (Jaya et al., 2019), namun inti masalah tetap pada visualisasi konsep batas yang ekstrem ini. Selain itu, kesulitan dalam memverifikasi perilaku asimtotik secara intuitif juga telah diidentifikasi sebagai tantangan utama dalam kurikulum analisis (Listiyotami et al., 2018).

Kebaruan (Novelty) dari penelitian ini terletak pada pengembangan model grafik Limit Supremum berbasis Komputasi Python untuk memvisualisasikan kaitan antara Sifat Archimedean dan Limit Supremum pada barisan real. Penggunaan alat komputasi menjadi relevan untuk menjembatani kesulitan visualisasi barisan non-trivial, terutama ketika membandingkan pendekatan Epsilon-Delta tradisional dengan representasi dinamis (Mulyana & Rosadi, 2022).

Model ini secara eksplisit mengilustrasikan bagaimana Sifat Archimedean memaksa konvergensi elemen barisan $\left\{1/n\right\}$ ke 0 (infimum) (Bartle & Sherbert, 2011) dan bagaimana presisi konvergensi Limit Supremum ditentukan oleh Sifat Supremum. Menggunakan kemampuan plotting Matplotlib, kami menyajikan visualisasi dinamis yang memproyeksikan batas atas dan batas bawah barisan secara simultan dengan Limit Supremum (Wibowo & Ramadhan, 2021), memungkinkan verifikasi visual yang cepat terhadap konjektur Limit Supremum sebelum dilakukan pembuktian formal (Apostol, 2020). Solusi ini mengalihkan fokus dari manualisasi pembuktian ke pemanfaatan komputasi sebagai alat eksplorasi untuk memperkuat intuisi teoretis (Gunawan, 2020).

Tujuan penelitian ini adalah untuk merancang dan menganalisis model grafik Limit Supremum berbasis komputasi Python, serta mendemonstrasikan bagaimana visualisasi ini dapat digunakan sebagai alat eksplorasi untuk membangun intuisi dan memverifikasi perilaku konvergensi formal dari Sifat Archimedean dan Sifat Supremum dalam Analisis Real.

METODE PELAKSANAAN

Penelitian ini menerapkan pendekatan kuantitatif-komputasional dengan metode eksperimen berbasis simulasi numerik, yang dikategorikan sebagai computational experiment karena data yang diperoleh bersumber dari pemodelan dan komputasi matematis, bukan dari responden manusia. Tujuan utamanya adalah melakukan verifikasi empiris terhadap konsep-konsep abstrak dalam analisis real—khususnya Archimedean Property, supremum (least upper bound), infimum (greatest lower bound), dan limit supremum pada barisan real—melalui visualisasi Python. Kegiatan penelitian dilaksanakan mulai bulan November 2025 hingga selesai secara daring (online), dengan memanfaatkan lingkungan komputasi lokal maupun cloud seperti Google Colab atau Jupyter Notebook.

Subjek dalam penelitian ini berupa model matematis dan barisan bilangan real yang dipilih menggunakan teknik purposive sampling matematis, yaitu pemilihan sampel berdasarkan relevansi logis terhadap teori yang ingin dibuktikan. Instrumen utama yang digunakan meliputi bahasa pemrograman Python beserta pustaka pendukung seperti numpy, matplotlib, dan math. Prosedur penelitian diawali dengan studi literatur terhadap teori terkait, dilanjutkan dengan perumusan model matematis, penulisan kode Python, hingga visualisasi grafik hasil komputasi numerik untuk membandingkan hasil visual dengan teori analisis real.

Teknik pengumpulan data bersifat simulatif-eksperimental, di mana data dikumpulkan dari hasil eksekusi kode Python yang direkam dalam bentuk grafik simulasi numerik, tabel data numerik, analisis limit, serta interpretasi supremum dan infimum. Analisis data kemudian dilakukan melalui dua pendekatan utama, yaitu analisis visual (graph-based analysis) untuk mengamati perilaku barisan, dan analisis teoretis (theory-based verification) dengan membandingkan hasil grafik terhadap teori dari Bartle & Sherbert (2011). Validitas data ditentukan jika grafik mendekati limit atau teori yang ada, sementara konsistensi hasil dijaga melalui reproducibility test dan validasi matematis. Jika hasil tidak sesuai, model akan direvisi dan diuji ulang hingga kesimpulan dapat ditarik.

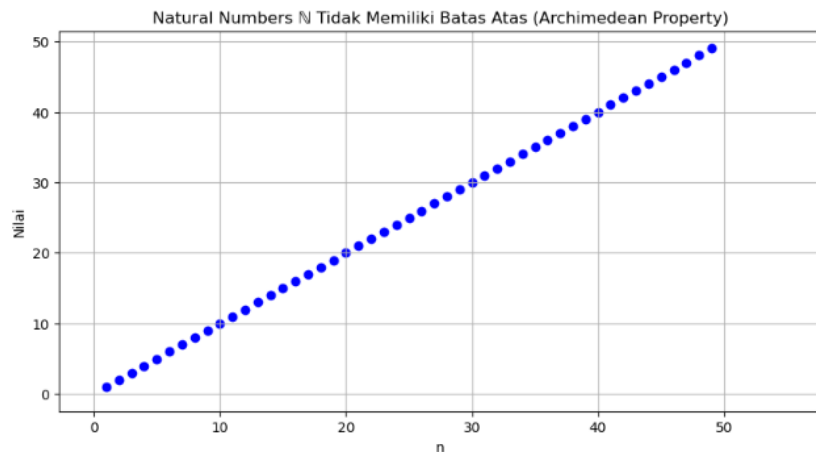
HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini menyajikan hasil visualisasi numerik menggunakan Python untuk mengilustrasikan penerapan Archimedean Property, Supremum Property, serta konsep limit supremum dan infimum pada barisan bilangan real. Visualisasi digunakan sebagai verifikasi komputasional terhadap hasil-hasil teoretis dalam analisis real.

Parameter numerik pada grafik:

1. Plot $\frac{1}{n}$ divisualisasikan untuk n dari 1 sampai sekitar 50.
2. Himpunan $1 - \frac{1}{n}$ divisualisasikan hingga $n = 1000$.
3. Barisan a_n ditampilkan hingga $n = 300$.

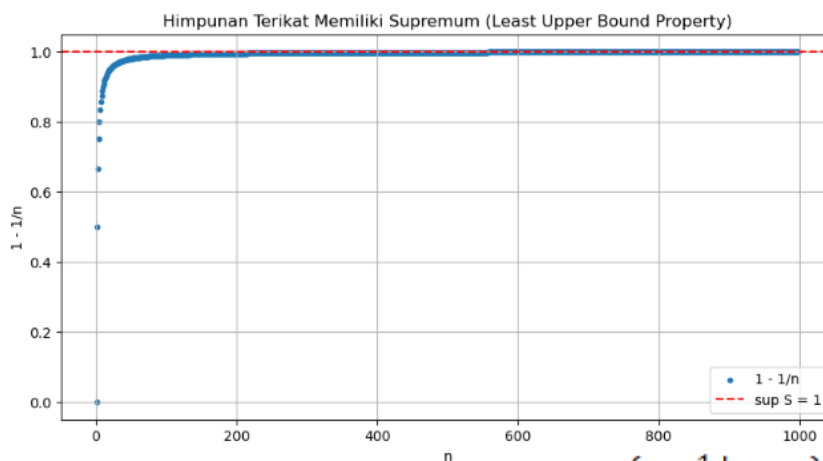
4. Barisan $1/n$ ditampilkan hingga $n = 200$.



Gambar 1. Visualisasi Archimedean Property pada Himpunan Bilangan Asli

Grafik pertama merepresentasikan pemetaan bilangan asli n terhadap nilainya sendiri. Hasil visualisasi menunjukkan bahwa nilai n terus meningkat tanpa kecenderungan mendekati suatu batas atas tertentu. Secara numerik, tidak tampak adanya garis horizontal yang membatasi pertumbuhan nilai n .

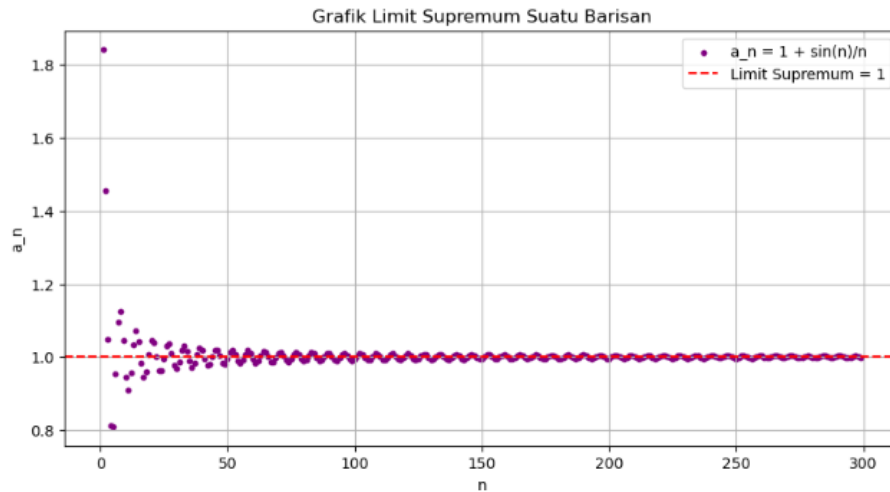
Hal ini sejalan dengan sifat Archimedean yang menyatakan bahwa untuk setiap bilangan real $x > 0$ dan setiap bilangan real y , terdapat bilangan asli n sehingga $nx > y$ (Bartle & Sherbert, 2011). Dalam konteks ini, dapat disimpulkan bahwa himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ tidak memiliki batas atas di dalam $\mathbb{R}$. Visualisasi komputasional memperkuat pernyataan teoretis tersebut dengan memperlihatkan pertumbuhan tak terbatas bilangan asli secara eksplisit.



Gambar 2. Visualisasi Supremum Himpunan $S = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

Grafik kedua menampilkan nilai-nilai elemen himpunan S untuk n hingga 1000. Secara numerik, terlihat bahwa nilai $1 - \frac{1}{n}$ meningkat monoton dan mendekati nilai 1 dari bawah, namun tidak pernah mencapai nilai tersebut. Secara teoretis, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $1 - \frac{1}{n} < 1$, sehingga 1 merupakan batas atas bagi S . Selain itu, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat n yang cukup besar sehingga $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$.

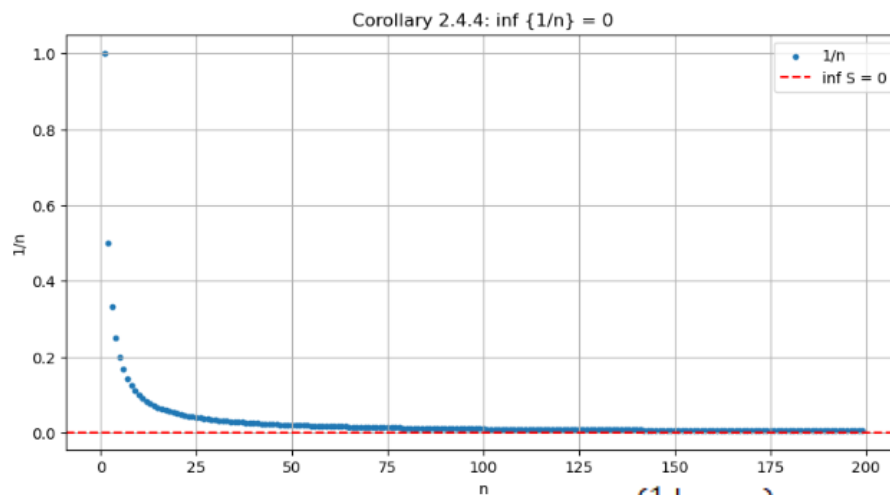
Berdasarkan definisi supremum (least upper bound) menurut Bartle dan Sherbert, maka 1 adalah supremum dari himpunan S . Hasil visualisasi menunjukkan bahwa semua titik berada di bawah 1 tetapi semakin rapat mendekatinya, sehingga menegaskan bahwa supremum tidak harus merupakan elemen dari himpunan itu sendiri.



Gambar 3. Limit Supremum Barisan

Grafik ketiga memperlihatkan perilaku barisan $a_n = 1 + \frac{\sin n}{n}$ untuk n hingga 300. Hasil visualisasi menunjukkan bahwa pada indeks kecil nilai a_n berosilasi cukup besar, namun amplitudo osilasi semakin mengecil seiring bertambahnya n . Untuk n yang besar, titik-titik barisan terkonsentrasi di sekitar nilai 1.

Karena berlaku ketaksamaan $-1 \leq \sin n \leq 1$, maka diperoleh $1 - \frac{1}{n} \leq a_n \leq 1 + \frac{1}{n}$. Karena $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ saat $n \rightarrow \infty$, maka menurut Teorema Apit diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Berdasarkan definisi limit superior dalam Bartle dan Sherbert, maka $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ dan $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Grafik hasil komputasi memperlihatkan secara jelas bagaimana osilasi fungsi sinus diredam oleh faktor $\frac{1}{n}$, sehingga barisan bersifat konvergen meskipun mengandung komponen osilatif.



Gambar 4. Visualisasi Infimum Himpunan $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

Grafik keempat menampilkan nilai barisan $1/n$ untuk n hingga 200. Secara numerik terlihat bahwa nilai $1/n$ menurun secara monoton dan mendekati nol, tanpa pernah mencapai nol. Menurut definisi infimum dalam Bartle dan Sherbert, suatu bilangan m merupakan infimum jika m adalah batas bawah dan setiap batas bawah lain b memenuhi $b \leq m$. Karena untuk setiap n berlaku $1/n > 0$, maka 0 adalah batas bawah himpunan $\{1/n\}$. Selain itu, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n > 1/\varepsilon$ sehingga $1/n < \varepsilon$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $\inf\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$. Hasil ini ditunjukkan secara konsisten oleh grafik, di mana titik-titik barisan semakin mendekati garis nol.

Hasil visualisasi numerik berbasis Python menunjukkan kesesuaian yang kuat dengan teori analisis real sebagaimana dipaparkan oleh Bartle dan Sherbert. Sifat Archimedean terverifikasi melalui pertumbuhan tak terbatas bilangan asli. Keberadaan supremum dan infimum pada himpunan terikat juga dapat diamati secara langsung melalui pendekatan numerik. Selain itu, konsep limit dan limit superior pada barisan osilatif berhasil divisualisasikan dengan jelas. Pendekatan komputasional ini tidak hanya berfungsi sebagai alat ilustratif, tetapi juga sebagai sarana verifikasi empiris terhadap konsep-konsep abstrak dalam analisis real. Dengan demikian, pemanfaatan Python dalam penelitian ini terbukti efektif untuk memperkuat pemahaman konseptual terhadap supremum, infimum, dan limit superior.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Penelitian ini menunjukkan bahwa metode pewarnaan graf menggunakan algoritma Welsh Powell bisa digunakan untuk membuat jadwal ujian yang tidak tumpang tindih. Dengan mewakili mata pelajaran sebagai graf konflik, kita bisa membagi sesi ujian secara tepat karena mata pelajaran yang saling bertabrakan ditempatkan di sesi yang berbeda. Model ini menghasilkan jadwal yang efisien dan bisa digunakan langsung, sehingga mencapai tujuan penelitian yaitu menyediakan sistem penjadwalan yang lebih terstruktur.

Saran

Penelitian bisa diperluas dengan menambahkan variabel seperti kapasitas ruangan, jumlah pengawas, dan kebutuhan distribusi siswa per sesi. Algoritma lainnya juga bisa diuji untuk membandingkan hasilnya dengan Welsh Powell, sehingga sekolah punya pilihan model penjadwalan yang lebih fleksibel.

DAFTAR PUSTAKA

- Apostol, T. M. (2020). *Mathematical Analysis: A Modern Approach to Advanced Calculus*. Addison-Wesley.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis* (4th ed.). John Wiley & Sons, Inc.
- Gunawan, R. (2020). Analisis numerik konvergensi barisan bilangan riil menggunakan metode komputasi. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, 10(1), 1–15.
- Jaya, R., Syahputra, E., & Rajab, R. (2019). Konsep Ruang Metrik dan Penerapannya dalam Analisis Fungsional. *Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, 5(2), 67–78.
- Listyotami, M. K., Noer, S. H., & Haenilah, E. Y. (2018). Discovery Learning to Develop Student Reflective Thinking Ability and Self-Efficacy. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, 9(1), 73–84.
- Mulyana, S., & Rosadi, T. (2022). Perbandingan Metode Epsilon-Delta dan Visualisasi Komputasi dalam Menganalisis Kekontinuan Fungsi. *Jurnal Analisis Matematika*, 8(1), 12–25.
- Rudin, W. (2019). *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill Education.
- Wibowo, S., & Ramadhan, R. (2021). Visualisasi konsep matematika tingkat lanjut menggunakan Matplotlib. *Jurnal Teknologi Informasi dan Sains*, 7(1), 45–55.