



Visualisasi Numerik Infimum–Supremum pada Barisan Konvergen dengan Python

Numerical Visualization of Infimum–Supremum in Convergent Sequences Using Python

Muhammad Ibrohim Nasution^{1*}, M.Arya Pasaribu², Rehmuliana niken sagala³, Sesy
Ophelia Tampubolon⁴

^{1,2,3,4} Universitas Negeri Medan, Medan, Indonesia

4231230002@mhs.unimed.ac.id^{1*}

aryapasaribu88@mhs.unimed.ac.id²

rehmuliananiken@gmail.com³

sesyophelia09@gmail.com⁴

Kata Kunci :

Supremum; Infimum; Barisan;
Visualisasi; Python

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan memberikan gambaran visual mengenai perilaku limit, supremum, dan infimum pada empat jenis barisan real dengan karakteristik berbeda melalui pendekatan komputasional menggunakan Python. Kesulitan mahasiswa dalam memahami supremum–infimum serta hubungan keduanya dengan limit barisan umumnya muncul karena sifat materi yang abstrak, sehingga representasi visual diperlukan untuk menjembatani teori dengan ilustrasi konkret. Metode penelitian menggunakan pendekatan deskriptif kualitatif, di mana seluruh data diperoleh secara otomatis melalui Python dengan dukungan pustaka NumPy dan Matplotlib. Empat barisan yang dikaji meliputi barisan monoton meningkat menuju 1, barisan monoton menurun menuju 1, barisan menurun menuju 0, dan sebuah barisan osilasi dengan amplitudo yang makin mengecil mendekati 1. Pada setiap barisan dihitung nilai running supremum dan running infimum untuk menampilkan perkembangan batas atas dan batas bawah sepanjang suku-suku barisan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa barisan pertama memperlihatkan pola naik dengan running supremum mendekati 1, sementara running infimum berada pada nilai awal. Barisan kedua menurun secara monoton dengan supremum tetap dan infimum bergerak mendekati 1. Barisan ketiga memiliki supremum pada suku pertama dan infimum yang menurun menuju 0. Barisan osilasi menunjukkan supremum dan infimum yang saling mendekat seiring mengecilnya amplitudo, mengindikasikan bahwa barisan tersebut konvergen ke 1. Seluruh hasil visualisasi tersebut konsisten dengan teori analisis real yang menjelaskan bahwa barisan monoton serta terbatas pasti memiliki limit. Temuan ini juga menunjukkan bahwa visualisasi numerik melalui Python efektif untuk membantu memahami supremum, infimum, dan perilaku konvergensi, sekaligus berfungsi sebagai sarana pedagogis dan analitis yang kuat untuk meninjau barisan yang sulit divisualisasikan secara simbolis.

Keywords :

supremum; infimum; sequence;
visualization; Python

ABSTRACT

This research aims to provide a visual representation of the behavior of limits, supremum, and infimum in four types of real sequences with differing characteristics using a computational approach through Python. Students often struggle to grasp these concepts because of their abstract nature; therefore, a visual method is needed to bridge theoretical understanding with concrete illustrations. The study employs a qualitative descriptive design, where all data were generated automatically using Python supported by NumPy and Matplotlib libraries. The sequences examined include a sequence that increases monotonically toward 1, a sequence that decreases monotonically toward 1, a sequence that decreases toward 0, and an oscillating sequence whose amplitude diminishes toward 1. For each sequence, running supremum and running infimum were calculated to depict the progression of upper and lower bounds across the sequence. The findings reveal that the first sequence increases with its running supremum approaching 1, while its running infimum remains at the initial value. The second sequence decreases with a fixed supremum and an infimum approaching 1. The third sequence shows its supremum at the first term and an infimum that moves downward toward 0. The oscillating sequence demonstrates converging upper and lower bounds as its amplitude shrinks, indicating convergence to 1. All visual outcomes align with fundamental real analysis theory, which states that bounded monotonic sequences always converge. These results further demonstrate that numerical visualization through Python effectively assists in understanding supremum, infimum, and convergence behavior, serving both as a pedagogical tool and an analytical method for evaluating sequences that are difficult to interpret symbolically.

PENDAHULUAN

Pemahaman supremum dan infimum merupakan fondasi penting dalam Analisis Real karena konsep ini berhubungan langsung dengan limit, kekonvergenan barisan, serta struktur keterurutan bilangan real. Namun, berbagai penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa sering menghadapi kesulitan dalam memahami supremum dan infimum akibat sifatnya yang abstrak dan tidak mudah divisualisasikan. Ketidamampuan mahasiswa dalam menghubungkan konsep teoretis dengan representasi numerik menyebabkan munculnya miskonsepsi, terutama ketika barisan atau himpunan memiliki perilaku yang kompleks. Kondisi ini menunjukkan perlunya pendekatan pembelajaran yang mampu menghadirkan pengalaman visual dan komputasional dalam mempelajari konsep batas.

Tren penelitian beberapa tahun terakhir memperlihatkan bahwa penggunaan perangkat komputasi seperti Python dan MATLAB semakin banyak digunakan untuk membantu memvisualisasikan konsep-konsep abstrak dalam Analisis Real. (Apriani dkk., 2025) membuktikan bahwa Python mampu menyelesaikan permasalahan supremum dan infimum pada berbagai jenis himpunan dengan lebih sistematis melalui perhitungan numerik. (Purnama dkk., 2025) mendemonstrasikan bagaimana grafik limit supremum dapat ditampilkan secara jelas menggunakan komputasi Python, sehingga konsep Archimedean Property dan supremum property lebih mudah dipahami secara visual. Sejalan dengan itu, (Winanti dkk., 2024) menegaskan bahwa Python dapat digunakan sebagai alat bantu efektif untuk menyelesaikan persoalan supremum–infimum secara praktis, baik pada himpunan diskrit maupun kontinyu.

Selain Python, perangkat MATLAB juga menunjukkan peran penting dalam visualisasi konsep analisis real. (Tarigan dkk., 2025) menekankan bahwa MATLAB mampu memberikan dukungan komputasi yang kuat dalam menyelesaikan persoalan barisan real, terutama dalam menampilkan perilaku numerik barisan dan batas-batasnya. Penggunaan perangkat komputasi ini membantu mahasiswa mengamati perkembangan nilai barisan secara langsung dan memberikan pemahaman lebih konkret mengenai batas atas terkecil dan batas bawah terbesar.

Dari perspektif internasional, visualisasi matematika dipandang sebagai pendekatan pedagogis yang efektif dalam meningkatkan pemahaman konseptual. (Muzangwa & Ogbonnaya, 2024) menyatakan bahwa visualisasi dalam pembuktian dan analisis matematis mampu memperkuat proses konseptualisasi mahasiswa, karena representasi grafis membantu mempermudah interpretasi struktur abstrak dan pola numerik. Temuan ini memperkuat urgensi penggunaan teknologi visual dalam pembelajaran Analisis Real, terutama ketika konsep seperti supremum, infimum, dan limit barisan sulit dipahami hanya melalui pendekatan simbolik.

Meskipun telah banyak penelitian yang memanfaatkan komputasi dalam menyelesaikan persoalan supremum dan infimum, sebagian besar masih berfokus pada himpunan statis atau penyelesaian numerik tanpa menelaah dinamika supremum dan infimum sepanjang barisan. Celah ini membuka ruang bagi penelitian yang memvisualisasikan pergerakan *running supremum* dan *running infimum* pada beberapa jenis barisan real, sehingga tidak hanya menghasilkan nilai batas, tetapi juga menggambarkan proses mendekatinya.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk memvisualisasikan limit, supremum, dan infimum pada beberapa jenis barisan real menggunakan Python. Visualisasi ini diharapkan dapat memberikan gambaran komprehensif tentang dinamika batas atas dan batas bawah suatu barisan serta membantu mahasiswa memahami keterkaitan antara supremum, infimum, dan limit secara lebih intuitif dan interaktif.

METODE PELAKSANAAN

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif yang berfokus pada visualisasi perilaku empat barisan real melalui pemrograman Python. Penelitian dilaksanakan pada November–Desember 2025 secara daring menggunakan perangkat komputer pribadi. Target penelitian meliputi empat barisan real dengan karakteristik berbeda, yaitu barisan monoton naik menuju 1, monoton turun menuju 1, monoton turun menuju 0, serta barisan osilasi yang amplitudonya semakin mengecil mendekati 1. Subjek penelitian berupa data numerik dari nilai setiap suku barisan beserta *running supremum* dan *running infimum* yang dihitung secara bertahap.

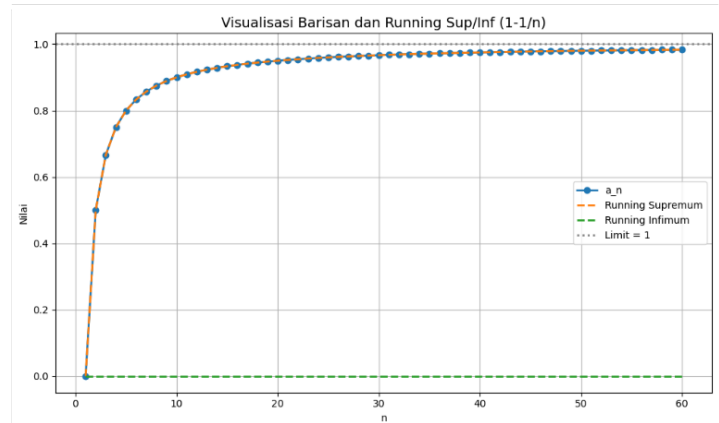
Prosedur penelitian diawali dengan menentukan bentuk barisan yang akan dianalisis, kemudian menghasilkan nilai barisan menggunakan Python, menghitung *running supremum* dan *running infimum* untuk melihat dinamika batas atas dan batas bawah, serta memvisualisasikannya melalui grafik agar kecenderungan limit dapat diamati secara jelas. Selanjutnya, grafik dianalisis untuk mengidentifikasi perilaku konvergensi, keterkaitan antara supremum dan infimum, serta pola mendekati limit sebagaimana terlihat pada hasil visualisasi dalam penelitian ini.

Data penelitian diperoleh secara komputasional, sehingga seluruh nilai barisan dan batas-batasnya dikumpulkan otomatis oleh sistem Python. Instrumen penelitian terdiri atas Python beserta pustaka NumPy dan Matplotlib yang digunakan untuk menghasilkan barisan, melakukan penghitungan numerik, dan menampilkan grafik visual yang akurat. Instrumen ini juga berfungsi sebagai alat untuk menggambarkan aspek-aspek yang diteliti, yaitu kecenderungan limit, supremum, infimum, dan pola konvergensi tiap barisan.

Teknik analisis data yang digunakan adalah analisis deskriptif visual dengan memaknai pola grafik untuk menarik kesimpulan mengenai konvergensi barisan, sesuai teori supremum, infimum, dan limit pada Analisis Real. Keabsahan hasil penelitian dijamin melalui konsistensi komputasi Python serta perbandingan antara hasil visual dengan teori dan temuan dari literatur terkait, sebagaimana tercermin dalam hasil dan pembahasan, kesimpulan, dan saran penelitian ini.

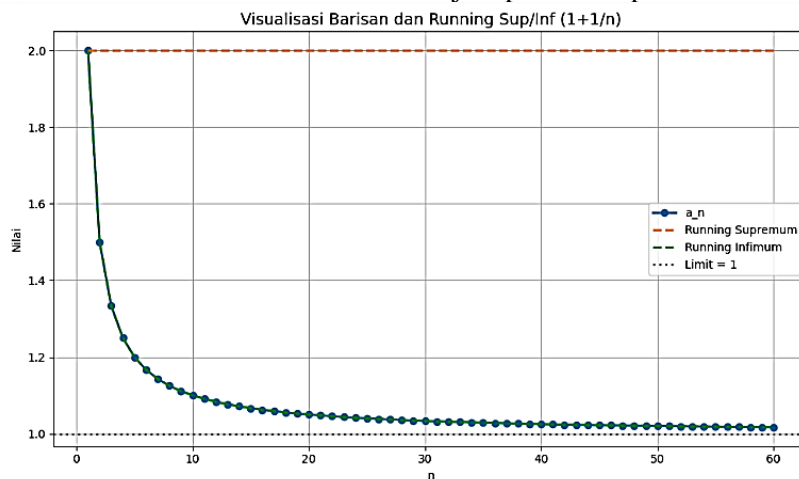
HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil penelitian ini disajikan dalam bentuk grafik yang menggambarkan perilaku beberapa barisan real, yaitu $1 - \frac{1}{n}$, $1 + \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$, dan suatu barisan osilasi yang mendekati nilai 1. Setiap grafik dilengkapi dengan nilai *running supremum* dan *running infimum* untuk memperlihatkan kecenderungan limit serta batas atas–bawah dari masing-masing barisan. Grafik-grafik tersebut dapat dilihat pada Gambar 1 sampai Gambar 4.



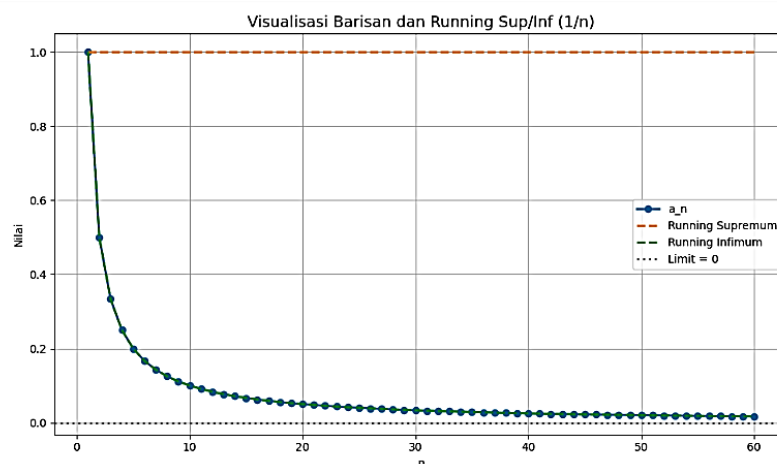
Gambar 1. Visualisasi barisan $1 - \frac{1}{n}$ beserta running sup/inf

Barisan $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ menunjukkan pola meningkat (*monoton naik*) menuju 1. Running supremum grafik meningkat seiring bertambahnya n , sementara running infimum tetap berada pada nilai awal barisan, menandakan bahwa nilai terkecil terjadi pada suku pertama.



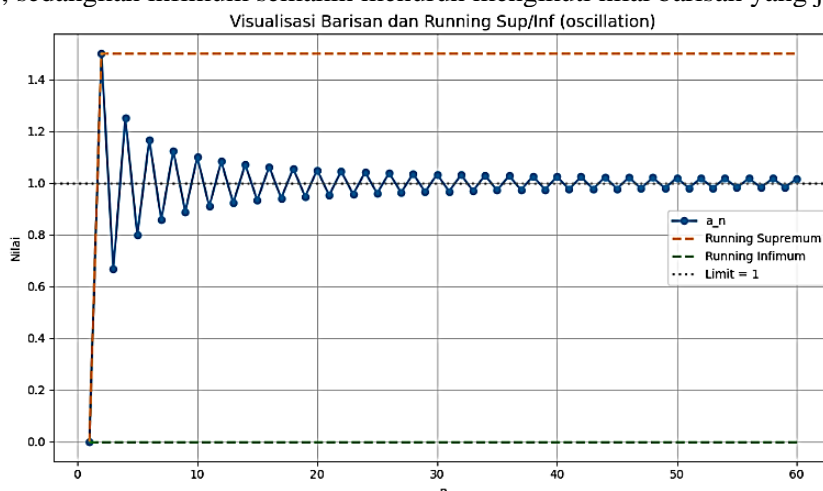
Gambar 2. Visualisasi barisan $1 + \frac{1}{n}$ beserta running sup/inf

Barisan $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ bersifat menurun (*monoton turun*) dari 2 menuju 1. Running supremum tetap konstan pada nilai maksimum awal, sedangkan running infimum bergerak naik mendekati nilai limit.



Gambar 3. Visualisasi barisan $\frac{1}{n}$ beserta running sup/inf

Barisan $\frac{1}{n}$ menurun menuju 0. Polanya menunjukkan bahwa supremum adalah nilai pada suku pertama, yaitu 1, sedangkan infimum semakin menurun mengikuti nilai barisan yang juga makin kecil.



Gambar 4. Visualisasi barisan osilasi menuju 1

Barisan osilasi menunjukkan fluktuasi di sekitar nilai 1, namun amplitudo osilasinya semakin mengecil. Running supremum bergerak menurun perlahan, sedangkan running infimum meningkat mendekati 1. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun barisan tidak monoton, ia tetap konvergen menuju limit yang sama.

Hasil visualisasi menunjukkan bahwa keempat barisan yang dianalisis memiliki perilaku limit, supremum, dan infimum yang konsisten dengan teori dasar analisis real. Barisan pertama $1 - \frac{1}{n}$ dan barisan ketiga $\frac{1}{n}$ masing-masing memperlihatkan karakteristik monoton naik dan monoton turun. Pola ini sejalan dengan sifat barisan monoton yang dibahas oleh Ubaidillah et al. (2013) yang menyatakan bahwa barisan monoton dan terbatas memiliki supremum atau infimum dan konvergen menuju nilai tersebut apabila supremum atau infimum berada dalam ruang pembahasannya. Visualisasi pada penelitian ini menegaskan hasil tersebut: barisan pertama mendekati 1 sebagai supremum, sementara barisan ketiga mendekati 0 sebagai infimum.

Barisan kedua $1 + \frac{1}{n}$ memperlihatkan perilaku monoton turun dan terbatas bawah oleh 1. Grafik running supremum dan running infimum menunjukkan penyempitan interval menuju nilai limit. Fenomena ini konsisten dengan Teorema 12 dalam Ubaidillah et al. (2013) yang menegaskan bahwa barisan monoton turun dengan infimum pasti konvergen ke infimumnya. Dengan demikian, hasil visual pada barisan ini mendukung teori bahwa limit barisan adalah 1.

Berbeda dengan tiga barisan sebelumnya, barisan keempat menunjukkan pola osilasi dengan amplitudo yang semakin mengecil. Meskipun tidak monoton, supremum dan infimum lokalnya bergerak saling mendekat sehingga limit dapat diamati secara visual. Visualisasi tersebut selaras dengan pendekatan Anggraini et al. (2025) yang menekankan bahwa representasi grafis melalui Python efektif dalam mengidentifikasi batas atas terkecil dan batas bawah terbesar, bahkan pada himpunan atau barisan dengan perilaku yang tidak sederhana. Temuan ini juga memperlihatkan bahwa inspeksi visual mampu mengungkap kecenderungan limit ketika perilaku barisan secara analitik tidak langsung terlihat.

Selain kesesuaian dengan teori, visualisasi ini mendukung temuan dari penelitian berbasis MATLAB dalam Analisis Real yang menyatakan bahwa perangkat komputasi membantu mahasiswa memahami perilaku limit, supremum, dan infimum. Integrasi visualisasi memungkinkan pengamatan langsung terhadap pola konvergensi, sehingga dapat meningkatkan pemahaman konsep abstrak yang umumnya sulit diinterpretasikan secara simbolik. Secara keseluruhan, hasil penelitian menunjukkan bahwa visualisasi barisan memberikan validasi empiris terhadap teori supremum, infimum, dan konvergensi. Selain itu, visualisasi terbukti menjadi alat pedagogis yang efektif untuk menjembatani konsep teoretis dengan representasi konkret, sesuai dengan temuan tiga literatur yang digunakan.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan hasil visualisasi empat barisan real yang dianalisis, dapat disimpulkan bahwa seluruh barisan menunjukkan perilaku limit, supremum, dan infimum yang sesuai dengan teori dasar analisis real. Barisan pertama dan ketiga menampilkan sifat monoton masing-masing monoton naik menuju nilai 1 dan monoton turun menuju nilai 0 yang menegaskan kembali teorema bahwa barisan monoton dan terbatas pasti konvergen. Barisan kedua juga menunjukkan pola monoton turun menuju nilai 1 dengan interval supremum–infimum yang semakin menyempit, sehingga memperlihatkan konvergensi menuju infimumnya. Sementara itu, barisan osilasi memperlihatkan fluktuasi dengan amplitudo mengecil, di mana running supremum dan running infimum bergerak saling mendekat menuju nilai limit yang sama, yaitu 1. Temuan ini menunjukkan bahwa pendekatan visual melalui grafik efektif dalam menggambarkan kecenderungan limit, supremum, dan infimum, bahkan untuk barisan yang tidak monoton. Secara keseluruhan, penelitian ini menegaskan bahwa representasi visual merupakan alat bantu analisis yang kuat untuk memahami konsep abstrak dalam analisis real, sekaligus memberikan validasi empiris terhadap teori yang sudah mapan.

Saran

Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan visualisasi serupa untuk jenis barisan lain yang lebih kompleks, seperti barisan tak terbatas, barisan dengan limit superior dan limit inferior yang berbeda, atau barisan yang didefinisikan secara rekursif. Selain itu, integrasi teknologi komputasi baik Python, MATLAB, maupun perangkat lunak lainnya dapat diperluas ke konteks pembelajaran untuk meningkatkan pemahaman mahasiswa terhadap konsep analisis real yang bersifat abstrak. Penggunaan animasi, interaktivitas, atau simulasi berbasis web juga dapat dipertimbangkan agar visualisasi lebih mudah diakses dan dipahami. Penelitian lanjutan juga dapat mengevaluasi efektivitas visualisasi dalam meningkatkan kemampuan berpikir analitis mahasiswa, sehingga manfaat pedagogis dari pendekatan ini dapat terukur secara lebih komprehensif.

DAFTAR PUSTAKA

- Anggraini, D., Hutabarat, R. A. N., Nabilah, W. N., & Hutapea, T. A. (2025). VISUALISASI SUPREMUM DAN INFIMUM MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN PYTHON. *Jurnal Media Akademik (JMA)*, 3(4).
- (Anonim). (n.d.). *Analisis kemampuan mahasiswa matematika real analysis dengan berbantuan software MATLAB*.
- Apriani, D. E., Siburian, G. B., Situmorang, R., Simamora, S. A., & Hutapea, T. A. (2025). MENYELESAIKAN PERMASALAHAN SUPREMUM DAN INFIMUM SUATU HIMPUNAN DENGAN MENGGUNAKAN PYTHON. *Jurnal Media Akademik (JMA)*, 3(3).
- Muzangwa, J., & Ogonnaya, U. (2024). Visualization techniques for proofs: Implications for enhancing conceptualization and understanding in mathematical analysis. *Journal of Honai Math*, 7(2), 347-362.
- Purnama, A. I., Zulfia, C., Cahaya, P., & Tambunan, X. E. (2025). Grafik Limit Supremum: Penerapan Archimedean Property dan Supremum Property melalui Komputasi Python: Limit Supremum Graph: Applying the Archimedean Property and Supremum Property through Python-Based Computation. *NUMBERS: Jurnal Pendidikan Matematika & Ilmu Pengetahuan Alam*, 3(4), 248-253.
- Ubaidillah, F., Darmawijaya, S., & Indrati, C. R. (2013). Kekonvergenan barisan di dalam ruang fungsi kontinu $C[a,b]$. *Jurnal Cauchy*, 2(4), 185–188.
- Tarigan, B. S. B., Agustin, F., Ujung, S. B. F., Purba, T. Y., Siregar, V. C. O., & Hutapea, T. A. (2025). Menyelesaikan Permasalahan Himpunan Barisan Bilangan Real Dengan Bantuan MATLAB: Solving Problems of Sequences of Real Numbers with the Assistance of MATLAB. *NUMBERS: Jurnal Pendidikan Matematika & Ilmu Pengetahuan Alam*, 3(4), 211-219.

Winanti, F., Hidayah, A., Purba, M. A., & Sitorus, N. A. (2024). Penggunaan Python Dalam Menyelesaikan Permasalahan Supremum dan Infimum Suatu Himpunan. *Pentagon: Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, 2(4), 12-23.